En este punto es necesario aclarar unos detalles acerca de cómo se encuentra el modo dominante para una situación dada. El modo dominante es aquel que tiene la frecuencia de resonancia mas bajo, y así se desea escoger los tres subíndices de manera que ω_r como dado por la ecuación (3) sea lo más bajo posible. Una posibilidad obvia es escoger el entero p igual a cero. Sin embargo esto sólo es posible para un modo TM y no para un modo TE. En el caso TE el campo eléctrico completo es transversal y debe igualar a cero en los extremos del resonador; $z = 0$, $z = d$. Si no se permite ninguna media longitud de onda, entonces el campo **E** es nulo en todas partes, y tenemos una solución trivial. En el caso TM puede existir una componente longitudinal de **E** aunque la componente transversal es nulo en todas partes, esto *no* conduce a una solución trivial o una situación de campo nulo. Entonces, para la caja rectangular tenemos: cualquier de los subíndices, pero no más de un subíndice puede escogerse igual a cero. En el caso TE cualquier de los primeros dos subíndices más no el último puede ser cero, y en el caso TM ninguno de los dos primeros subíndices puede ser cero más el último puede ser cero.

Esta generalidad de la solución puede ser una fuente de preocupación. Con referencia al resonador rectangular, parece a primera vista, que al orientar la caja a lo largo de los ejes de coordenadas se puede obtener unos completamente nuevos modos de operación. Sin embargo esto no es así. Todos los modos generados así simplemente serán repeticiones de los modos obtenidos por otra orientación. La única distinción será que se numera de forma diferente. Esto es aparente cuando se recuerda que los subíndices sólo denota el número de variaciones de medio cicio a lo largo de los ejes de las coordenadas respectivas. Todas las situaciones posibles pueden numerarse para cualquier orientación de la caja. Esto es un punto importante y de esto algunas inferencias sutiles se pueden sacar. En la teoría de guía de onda, vimos que los modos en una guia cilíndrica se pueden obtener de los modos correspondientes de la guía rectangular por medio de la deformación gradual de las paredes hasta que se vuelvan cilíndricas. Así concluimos que el método de la guía de onda nos conduce a un juego completo de soluciones para el resonador cilíndrico. Finalmente, el argumento de la deformación se aplica de igual manera, sin importar la geometría de la sección transversal y se puede inferir que el método de la guía de onda conduce a la solución más general posible para cualquier resonador que posee propiedades axiales.

Ejemplo 2

Como ejemplo de unos cálculos de frecuencias de resonancia veamos dos cavidades, una rectangular y otra cilíndrica con dimensiones parecidas. Se desea encontrar el modo dominante y la configuración del campo en cada caso. La cavidad rectangular es de dimensiones 10 cm x 4 cm x 10 cm (*a* x *b* x *d* respectivamente), y la cilíndrica es de radio 5 cm y longitud 4 cm. Las dos cavidades son mas o menos del mismo tamaño y sólo de un razonamiento físico esperamos que tengan los modos dominantes similares. Considere la cavidad rectangular primero: Al combinar las ecuaciones (3) y (4) obtenemos la expresión para la frecuencia de resonancia:

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}}\sqrt{\left(\frac{m\pi}{0.1}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{0.04}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{0.1}\right)^2}$$

Deseamos encontrar el valor mas bajo para f_r, y escogemos los valores de m, n y p lo más bajo posible, consistente con la regla que sólo uno de ellos puede ser nulo. Es obvio que al seleccionar $n = 0$ y $m = p = 1$ obtenemos la situación de minima frecuencia. El modo resultante será entonces el modo TE_{101} y la frecuencia de resonancia correspondiente será:

$$f_r = \frac{3\times10^8}{2\pi}\sqrt{(10\pi)^2+(10\pi)^2} = 2.12\ \text{GHz}$$

Observe que el modo tiene que ser TE ya que no podemos admitir 0 en ninguno de los primeros dos subíndices del modo TM.
Ahora la cavidad cilindrica: La frecuencia de resonancia se obtiene de las ecuaciones (3) y (5) y es

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}}\sqrt{\left(\frac{p_{nl}}{0.05}\right)^2+\left(\frac{p\pi}{0.04}\right)^2}$$

o

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}}\sqrt{\left(\frac{p'_{nl}}{0.05}\right)^2+\left(\frac{p\pi}{0.04}\right)^2}$$

Al revisar las tablas de las raices de las funciones de Bessel y sus derivadas, se puede ver que el valor mas bajo posible de p y p' son 2.40 y 1.84 respectivamente. (Ver el formulario de microondas). Luego la frecuencia minima se obtiene al seleccionar $p = 0$ y escoger el modo TM de orden mas bajo que corresponde a $p_{01} = 2.40$. El modo resultante será entonces el modo TM_{010} y la frecuencia de resonancia es

$$f_r = \frac{3\times10^8}{2\pi}\sqrt{\left(\frac{2.40}{0.05}\right)^2} = 2.29\ \text{GHz}$$

Observe que hay dos subíndices iguales a cero en este modo. Estos es permisible en el caso cilindrico ya que el ordenamiento de las funciones de Bessel empieza con 0 en vez de 1. Observe que las dos frecuencias de resonancia son muy parecidas, pero puede aparecer a primera vista que los modos son radicalmente diferentes. Esta discrepancia aparente se debe a la seleccion del sistema de coordenados; fue orientado de manera que la dimension corta fuese vertical y no longitudinal, como en el caso cilíndrico. Cuando las dos cavidades se orientan de forma similar, sus configuraciones de campo son similares como se muestra en la figura 3.

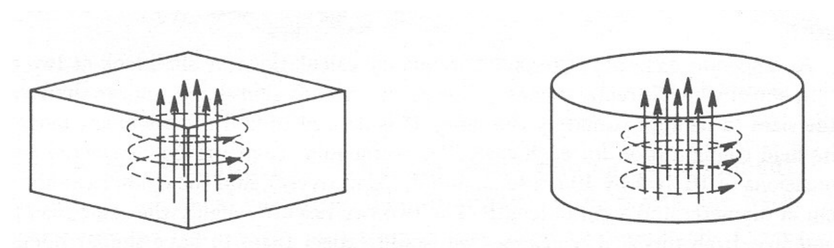


Figura 3
Modos similares en las cavidades rectangular y cilíndrica.

Consideraciones de energía en las cavidades resonantes

La solución de las ecuaciones de Maxwell para una cavidad resonante a menudo se refiere a un solucion libre de fuentes puesto que los campos se soportan por la estructure aunque las fuentes que establecieron los campos se han decaido a cero. Por el principio de la conservación de energía (el teorema de Poynting) aplicado a una región libre de fuentes encerrada por una superficie de conductor perfecto, tenemos

$$-\iiint_V \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}^* dv = \iiint_V \sigma|\boldsymbol{E}|^2 dv + j\omega\iiint_V (\mu|\boldsymbol{H}|^2+\epsilon|\boldsymbol{E}|^2)dv + \oint\!\!\oint_S \boldsymbol{P}\cdot d\,\boldsymbol{a}$$

que reduce a

$$0 = j\omega_r \iiint_V (\mu|\boldsymbol{H}|^2-\epsilon|\boldsymbol{E}|^2)dv \tag{7}$$

para una estructura sin pérdidas. Como la frecuencia de resonancia no es cero, operando a la frecuencia de resonancia implica:

$$\iiint_V \mu|\boldsymbol{H}|^2 dv = \iiint_V \epsilon|\boldsymbol{E}|^2 dv \tag{8}$$

En otras palabras, el promedio en el tiempo de la energía almacenado en el campo eléctrico es igual al promedio en el tiempo de la energía almacenado en el campo magnético. Esto es una caracteristica de todas las cavidades resonantes y si examinamos un caso específico en detalle, encontramos que la energía oscila entre el campo eléctrico y el campo magnético. Esto es el mismo comportamiento observado en un circuito resonante de elementos constantes concentrados.

Ejemplo 3.

Considere un resonador rectangular de la figura 2. Las componentes del campo que vimos antes en el ejemplo 1 se repiten aqui:

$$E_x = E_z = H_y = 0$$

$$E_y = 2\,jE_0 \operatorname{sen}\frac{\pi z}{d}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{a}$$

$$H_x = \frac{2\,E_0\sqrt{1-\left(\frac{\omega_c}{\omega_r}\right)^2}}{\eta}\cos\frac{\pi z}{d}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{a}$$

$$H_z = -\left(\frac{2\,E_0\omega_c}{\omega_r\eta}\right)\operatorname{sen}\frac{\pi z}{d}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{a}$$

Vamos a determinar la energía total almacenada en el campo eléctrico y la energía total almacenada en el campo magnético y luego asegurarnos que estas dos energías son, de hecho, idénticas. El total del promedio en el tiempo de la energía almacenado en el campo eléctrico es:

$$\frac{1}{2}\iiint \frac{1}{2}\epsilon|\boldsymbol{E}|^2 dv = \int_0^d\int_0^b\int_0^d \frac{\epsilon_0}{4}|E_0|^2 \operatorname{sen}^2\frac{\pi z}{d}\operatorname{sen}^2\frac{\pi x}{a}\,dx\,dy\,dz$$
$$= \epsilon_0\frac{|E_0|^2}{4}abd$$

El total del promedio en el tiempo de la energía magnética almacenada en el campo magnético es

$$\frac{1}{2}\iiint \frac{1}{2}\mu|\boldsymbol{H}|^2 dV = \int_0^d\int_0^b\int_0^a \frac{\mu_0}{4}\frac{4|E_0|^2}{\eta^2}$$
$$\left\{\left[1-\left(\frac{\omega_c}{\omega_r}\right)^2\right]\cos^2\frac{\pi z}{d}\operatorname{sen}^2\frac{\pi x}{a}+\left(\frac{\omega_c}{\omega_r}\right)^2\operatorname{sen}^2\frac{\pi z}{d}\cos^2\frac{\pi x}{a}\right\}dx\,dy\,dz$$
$$= \frac{4\mu_0}{4}\frac{|E_0|^2}{\eta^2}\left[1-\left(\frac{\omega_c}{\omega_r}\right)^2+\left(\frac{\omega_c}{\omega_r}\right)^2\right]\frac{abd}{4}$$
$$= \frac{\mu_0|E_0|^2}{4\mu_0/\epsilon_0}abd$$
$$= \frac{\epsilon_0|E_0|^2}{4}abd$$

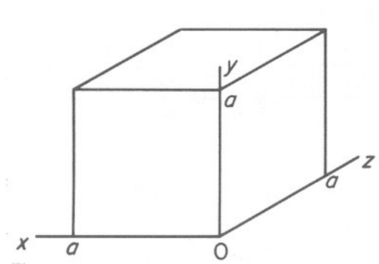
De esta manera la conclusión a que se llega es como se mencionó arriba, es decir, el total del promedio en el tiempo de la energía almacenado en el campo eléctrico es igual al total del promedio en el tiempo de la energía almacenado en el campo magnético de la cavidad resonante.

Q de la cavidad resonante

Como se sabe, el factor de calidad de un circuito resonante puede definirse como

$$Q=2\pi\,\frac{\text{energía máxima almacenada por ciclo}}{\text{energía disipada por ciclo}}$$

Esta relación nos permite la forma más directa para encontrar el Q de la cavidad resonante. Como ejemplo de este procedimiento, considere el problema de calcular el Q de una cavidad rectangular cubica lleno de aire que opera en el modo TE_{101}, como mostrado en la figura 4.



$$E_y=-2\,jE_0\operatorname{sen}\frac{\pi x}{a}\operatorname{sen}\frac{\pi z}{a}$$
$$H_x=-\frac{2\,E_0}{Z_{0(\mathrm{TE})}}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi z}{a}$$
$$H_z=\frac{2\,E_0}{Z_{0(\mathrm{TE})}}\cos\frac{\pi x}{a}\operatorname{sen}\frac{\pi z}{a}$$
$$E_x=E_z=H_y=0$$

Figura 4
Cavidad rectangular, modo TE_{101}

La energía pico puede obtenerse al integrar $\frac{1}{2}\epsilon_0|\boldsymbol{E}|^2$ sobre el volumen de la cavidad. Utilizando las ecuaciones mostradas con la figura 4 y realizando la integración conduce a

$$W_{(\mathrm{almacenada})}=\frac{1}{2}\epsilon_0\frac{4|E_0|^2a^3}{4}=\frac{\epsilon_0|E_0|^2a^3}{2} \tag{9}$$

La potencia disipada en uno de los lados está dado por

$$\begin{aligned}P_{(\mathrm{lado})}&=\int_0^a\frac{1}{2}|\boldsymbol{J}_s|^2R_s\,a\,dz=\frac{1}{2}R_s\,a\int_0^a\frac{4|E_0|^2}{Z_{0(\mathrm{TE})}^2}\operatorname{sen}^2\frac{\pi z}{a}\,dz\\&=\frac{R_s\,a^2|E_0|^2}{Z_{0(\mathrm{TE})}^2}\end{aligned} \tag{10}$$

Debido a la simetría, la potencia disipada en las cuatro lados será cuatro veces este valor. Luego, la potencia disipada en la pared superior $P_{(\mathrm{Sup})}$ será

$$
\begin{aligned}
P_{(\mathrm{Sup})} &= \int_0^a \int_0^a \frac{1}{2} |\boldsymbol{J}_s|^2 R_s \, dx\, dz = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^a (|H_x|^2 + |H_y|^2)\, dx\, dz \\
&= \frac{1}{2} R_s \frac{4|E_0|^2}{Z_{0(\mathrm{TE})}^2} \int_0^a \int_0^a \left(\mathrm{sen}^2 \frac{\pi x}{a} \cos^2 \frac{\pi z}{a} + \cos^2 \frac{\pi x}{a} \mathrm{sen}^2 \frac{\pi z}{a} \right) dx\, dz \\
&= \frac{R_s a^2 |E_0|^2}{Z_{0(\mathrm{TE})}^2}
\end{aligned}
\tag{11}
$$

De esta manera la potencia total perdida es

$$
P_{(\mathrm{Total})} = \frac{6 R_s a^2 |E_0|^2}{Z_{0(\mathrm{TE})}^2} \tag{12}
$$

y el Q está dado por

$$
Q = 2\pi f_r \frac{\dfrac{\epsilon_0 |E_0|^2 a^3}{2}}{\dfrac{6 R_s a^2 |E_0|^2}{Z_{0(\mathrm{TE})}^2}} = \omega_r \frac{\epsilon_0 Z_{0(\mathrm{TE})}^2 a}{12 R_s}
$$

Ahora, para una cavidad cubica,

$$
\begin{aligned}
\omega_r &= \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \sqrt{2} \frac{\pi}{a} \\
\omega_r &= \sqrt{2}\, \omega_c \\
Z_{0(\mathrm{TE})} &= \sqrt{2}\, \eta
\end{aligned}
$$

La expresión final para el factor de calidad Q es

$$
Q = \frac{\sqrt{2} \pi \eta}{6 R_s} \tag{13}
$$

En el rango de las microondas R_s es del orden de una fracción de un ohmio, de manera que valores de Q en el orden de varios miles no es inusual. Así las cavidades resonantes son muy utiles en las aplicaciones que requieren un elemento sensible a frecuencia tales como osciladores y medidores de frecuencias. El método utilizado arriba también sirve para otras formas de cavidades y modos de operación. Sin embargo el algebra involucrado es usualmente bastante tedioso.